- Examen mardi 9 juin : sujet envoyé à 9h, copie à rendre dans la journée.
- Cours du mercredi 20 mai sera peut-être décalé à 15h (échange avec Zoé C. à confirmer).

THÉORIE SPECTRALE

Exemple : $L^2([0,2\pi]^d)$ $\quad k \in \mathbb{Z}^d$

$$\Delta \underbrace{e^{ik\cdot x}}_{\text{base hilbertienne}} = \underbrace{-|k|^2}_{\text{valeur propre}} e^{ik\cdot x}$$

I. Opérateurs

E, F sont deux Banach

$\mathcal{L}(E,F) := \{$application linéaires continues de E dans $F\}$.

1) Définitions

Définition : Un opérateur ("non borné") est une application T définie sur un sous-espace $D(T)$ (le "domaine" de T) de E, linéaire à valeurs dans F :

$$T : D(T) \subset E \longrightarrow F \text{ linéaire.}$$

T est borné si T est continu.

Par exemple : $E = L^2(\mathbb{R}) = F$.

$T = \Delta$ est un opérateur de domaine $D(T) = H^2(\mathbb{R})$

Si $E = H^2(\mathbb{R})$ et $F = L^2(\mathbb{R})$

alors T est un opérateur borné de E dans F.

Définition : Si $D(T)$ est dense dans E, alors on définit $D(T^*) := \{ f \in F^* \ / \ x \in D(T) \mapsto \langle f, Tx \rangle_{F^* \times F}$ est continue : $\exists C, \forall x \in D(T)$, $|\langle f, Tx \rangle| \leq C \|x\|_E \}$.

Si $f \in D(T^*)$ alors $g : D(T) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \langle f, Tx \rangle$ est linéaire continue et peut se prolonger en une application linéaire continue unique dans E^*..

<u>Définition</u> (adjoint) : Soit T un opérateur à domaine dense. T^* est l'unique opérateur de domaine $D(T^*)$ défini par $\forall f \in D(T^*)$, $\forall x \in D(T)$,

$$\langle T^* f, x \rangle_{E^* \times E} := \langle f, Tx \rangle_{F^* \times F}.$$

<u>Exemple</u> (exercice) : $E = F = L^2(\mathbb{R})$.

Soit $D(T) = H^1(\mathbb{R})$ défini par $\forall f \in H^1(\mathbb{R})$, $Tf := f' + f$.

$T : \overset{D(T) \subset}{E} \to F$

$T^* : D(T^*) \subset F^* \to E^*$

H^1 est dense dans L^2 (exercice !)

$D(T^*) = H^1(\mathbb{R})$ et $T^* f = -f' + f$.

$$\left(\langle T^* f, g \rangle = \langle f, Tg \rangle = \int f (g' + g) = \int -f'g + fg \right).$$

<u>Proposition</u> : $T : D(T) \to F$ à domaine dense, alors T^* est fermé

<u>Rappel</u> : Un opérateur est fermé si $Gr(T) = \bigcup_{x \in D(T)} (x, Tx)$ est fermé.

<u>Démonstration</u> : Soit (f_n) suite de $D(T^*)$ telle que $f_n \to f$ dans F^* et $T^* f_n \to g$ dans E^*. Montrons que $T^* f = g$.

On sait que $\langle f, Tx \rangle = \langle T^* f, x \rangle \quad \forall x \in D(T)$
par ailleurs $\langle f, Tx \rangle = \lim\limits_{n \to \infty} \langle f_n, Tx \rangle$
et $\langle g, x \rangle = \lim\limits_{n \to \infty} \langle T^* f_n, x \rangle$.

Mais $\langle T^* f_n, x \rangle = \langle f_n, Tx \rangle$
donc $\langle f, Tx \rangle = \langle g, x \rangle$.

Mais alors $\forall x \in D(T)$, $|\langle f, Tx \rangle| = |\langle g, x \rangle|$
$\leq \|g\|_{E^*} \|x\|_E$

Donc $f \in D(T^*)$ et $T^* f = g$.

2 <u>Opérateurs compacts</u> :

<u>Définition</u> : Un opérateur $T \in \mathcal{L}(E, F)$ est compact si $T(B_E)$ (où B_E est la boule unité fermée de E) est relativement compacte dans F pour la topologie forte.

<u>PROPOSITION</u> : $K(E, F)$ l'ensemble des opérateurs compacts de E dans F est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{L}(E, F)$.

Démonstration : Soit (T_n) une famille de $K(E,F)$ telle qu'il existe $T \in \mathcal{L}(E,F)$, $\|T_n - T\|_{\mathcal{L}(E,F)} \to 0$

Montrons que $T \in K(E,F)$.

Soit $\varepsilon > 0$ fixé. On recouvre $T_n(B_E)$ par un nombre fini de boules de taille $\frac{\varepsilon}{2}$, pour chaque n.

Mais $\exists N, \quad \forall n \geq N, \quad \|T_n - T\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Par l'inégalité triangulaire, $T(B_E)$ se recouvre par un nombre fini de boules de rayon ε. $\blacksquare$

Remarque : $K(E,F)$ contient en particulier l'adhérence des opérateurs de rang fini.

Proposition : Si F est un espace de Hilbert, alors tout $T \in K(E,F)$ est limite d'opérateurs de rang fini.

Démonstration : Soit $\varepsilon > 0$ et $T \in K(E,F)$.

Il existe $(y_i)_{i \in I}$ avec I fini telle que $\overline{T(B_E)}$ s'injecte dans $\bigcup_{i \in I} B_F(y_i, \varepsilon)$.

Soit p le projecteur orthogonal sur $\mathrm{Vect}(y_i, i \in I)$ alors p est de rang fini.

Soit $x \in B_E$ et $i \in I$ tel que $\|Tx - y_i\| \leq \varepsilon$.

Alors $\|Tx - p_G Tx\| \leq \|Tx - y_i\| + \|y_i - p_G Tx\|$

$$\leq \varepsilon + \|p_G y_{n_i} - p_G Tx\|$$

$$\leq \varepsilon + \|y_{n_i} - Tx\| \leq 2\varepsilon .$$

Théorème (Schauder) : Soit $T \in \mathcal{L}(E,F)$: $T \in K(E,F) \Leftrightarrow T^* \in K(F^*,E^*)$.

Démonstration :

$\Rightarrow$ Soit $T \in K(E,F)$. Mq $T^* \in K(F^*,E^*)$.

Soit (f_n) une suite de B_{F^*}. Mq $(T^* f_n)$ possède une sous-suite qui converge dans E^*.

$(\langle T^* f_n , x \rangle_{E^* \times E} = \langle f_n, Tx \rangle_{F^* \times F})$.

la famille $\{ y \in \overline{T(B_E)} \longmapsto \langle f_n, y \rangle \}$ est équicontinue et $\overline{T(B_E)}$ métrique compact dans F donc par le théorème d'Ascoli, quitte à extraire une sous-suite, il existe $\varphi \in C(\overline{T(B_E)})$, telle que

$$\sup_{x \in B_E} |\langle f_n, Tx \rangle - \langle \varphi, Tx \rangle| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 .$$

En particulier

$$\sup_{x \in B_E} |\langle f_n - f_m, Tx \rangle| \xrightarrow[n,m \to \infty]{} 0 .$$

On conclut que $T^* f_n$ est une suite de Cauchy dans E^* donc elle converge. ∎

$\Leftarrow$ Supposons que $T^* \in K(F^*, E^*)$.

Alors $T^{**} \in K(E^{**}, F^{**})$.

$\left(\langle T^{**} g, f \rangle_{F^{**} \times F^*} := \langle g, T^* f \rangle_{E^{**} \times E^*} \right)$

Alors $\overline{T^{**}(B_{E^{**}})}$ est compacte dans F^{**}.

Mais $T(B_E) = T^{**}(B_E)$ car $T^{**}_{|E} = T$

$\big($si $g \in E$: $\langle T^{**} g, f \rangle = \langle g, T^* f \rangle_{E \times E^*}$

$= \langle Tg, f \rangle_{F \times F^*} \big)$

Finalement $T(B_E) \subset F$ et est relativement compact dans F^{**}. Mais F est fermé dans F^{**} d'où $\overline{T(B_E)}$ est compact dans F. $\blacksquare$

3 ALTERNATIVE DE FREDHOLM :

Rappel : Théorème (Riesz) : B_E est compacte si et seulement si E est de dimension finie.

Lemme : Si E est un espace vectoriel normé, et M est un sous-espace fermé strictement inclus dans E, alors $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x \in E$, $\|x\|_E = 1$, $d(x, M) \geq 1 - \varepsilon$.

Définition : • Si $A \in E$, alors $A^\perp := \{ f \in E^* / \langle f, x \rangle = 0 \ \forall x \in A \}$.

- Si $B \subset E^*$, alors $B^\perp := \{x \in E \,/\, \langle f, x \rangle = 0 \;\; \forall f \in B\}$.

<u>Proposition</u> (exo) : Soit $T : E \to F$ fermé. Alors

$$\mathrm{Ker}\, T = (\mathrm{Im}\, T^*)^\perp \; ; \; \mathrm{Ker}\, T^* = (\mathrm{Im}\, T)^\perp$$
$$\overline{\mathrm{Im}\, T^*} \subset (\mathrm{Ker}\, T)^\perp \; , \; \overline{\mathrm{Im}\, T} = (\mathrm{Ker}\, T^*)^\perp.$$

$\mathrm{Im}\, T$ fermée $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Im}\, T^*$ fermée $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Im}\, T = (\mathrm{Ker}\, T^*)^\perp$
$\Leftrightarrow$ $\mathrm{Im}\, T = (\mathrm{Ker}\, T)^\perp$.

<u>Théorème</u> (Alternative de Fredholm). Soit $T \in \mathcal{K}(E)$.

Alors

a) $\mathrm{Ker}\,(Id - T)$ est de dimension finie.

b) $\mathrm{Im}\,(Id - T)$ est fermée et $\mathrm{Im}(Id - T) = \mathrm{Ker}\,(Id - T^*)^\perp$.

c) $Id - T$ injectif $\Leftrightarrow$ $Id - T$ surjectif

d) $\dim \mathrm{Ker}\,(Id - T) = \dim \mathrm{Ker}\,(Id - T^*)$.

<u>Remarques</u> :
- $Tf = \lambda f$? $(T - \lambda Id) f = 0$
- On veut résoudre $f - Tf = g$.

– soit $\forall g \in E$, $\exists !$ solution c)

– sinon $f - Tg = 0$ a n solutions linéairement indépendants par a) et $f - Tf = g$ a une solution si et seulement si g vérifie $\underset{d)}{n}$ relations d'orthogonalité $\underset{b)}{}$

Démonstration :

a) Soit $K = \mathrm{Ker}(Id - T)$.

On a $B_K = T(B_K)$ $\quad (x \in K \Leftrightarrow x = Tx)$
donc comme $T \in \mathcal{K}(E)$ alors B_K est compacte.
D'où K est de dimension finie par le théorème de Riesz.

b) Montrons que $\mathrm{Im}(Id - T)$ est fermée dans E.
Soit (x_n) une suite de E telle que $y_n := x_n - Tx_n$ converge vers $y \in E$. Montrons $\exists x, y = x - Tx$.

Soit $d_n := d(x_n, K)$ et soit $x'_n \in K$

tel que $\|x_n - x'_n\| = d_n$.

- Mq (d_n) est bornée. Supposons (quitte à extraire une sous-suite) que $d_n \longrightarrow \infty$.

On pose $z_n = \dfrac{x_n - x'_n}{d_n}$ alors $d(z_n, K) = \underbrace{\dfrac{1}{d_n} d(x_n, K)}_{=1}$

Mais $(Id - T) z_n = \dfrac{y_n}{d_n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ car (y_n)

est bornée. Mais T est compact donc quitte à extraire, Tz_n converge vers une limite z.

Mais alors $z_n \longrightarrow z$ et $z = Tz$, ce

qui est contradictoire avec $d(z_n, K) = 1$.

Donc (d_n) est bornée.

- $d_n = \|x_n - x'_n\|$ est bornée donc par compacité de T, $\exists z \in E$, $T(x_n - x'_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} z$, quitte à extraire une sous-suite.

Mais $x_n - x'_n = y_n + Tx_n - Tx'_n$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} y + z$$

Donc $Ty + Tz = z$.

D'où $y = y + z - Ty - Tz$

$$= (y+z) - T(y+z) = x - Tx.$$

D'où $y \in \mathrm{Im}(\mathrm{Id} - T)$.